Antwoorden Oefenvragen

VWO

Wiskunde B

Examenjaar 2025-2026

examen
overzicht.nl

Inhoudsopgave

1. Algemeen: algebraïsche vaardigheden

1.1 Algebraïsche vaardigheden

1. Wiskunde B VWO 2017 (pilot), tijdvak 2, vraag 11

Oefenvraag pilot examen 2017 tijdvak 2 – vraag 11

Om een chemische reactie tot stand te brengen is een bepaalde hoeveelheid **activeringsenergie** nodig. De Zweedse scheikundige en Nobelprijswinnaar Svante Arrhenius heeft een vergelijking opgesteld die het verband aangeeft tussen het aantal reagerende moleculen, de temperatuur en de activeringsenergie:

$$k = A \cdot e^{-\left(\frac{E}{8{,}314T}\right)}$$

Hierin is
- A de constante van Arrhenius;
- E de activeringsenergie (in joule per mol);
- T de temperatuur (in kelvin);
- k een getal dat aangeeft hoeveel moleculen er per seconde reageren.

De vergelijking van Arrhenius kun je herleiden tot de volgende vorm:

$$E = 8{,}314T \cdot \ln\left(\frac{A}{k}\right)$$

Geef een herleiding waaruit dit blijkt.

Maximumscore 4 punten

Het juiste antwoord is:

- Uit de vergelijking van Arrhenius volgt $\frac{k}{A} = e^{-\left(\frac{E}{8{,}314T}\right)}$.
- $-\left(\frac{E}{8{,}314T}\right) = \ln\left(\frac{k}{A}\right)$.
- $\frac{E}{8{,}314T} = -\ln\left(\frac{k}{A}\right)$ $\left(= \ln\left(\left(\frac{k}{A}\right)^{-1}\right)\right) = \ln\left(\frac{A}{k}\right)$.
- Dus $E = 8{,}314T \cdot \ln\left(\frac{A}{k}\right)$.

Of

- Uit de vergelijking van Arrhenius volgt $\ln(k) = \ln\left(A \cdot e^{-\left(\frac{E}{8{,}314T}\right)}\right)$.
- $\ln(k) = \ln(A) - \frac{E}{8{,}314T}$.
- $\frac{E}{8{,}314T} = \ln(A) - \ln(k) = \ln\left(\frac{A}{k}\right)$.
- Dus $E = 8{,}314T \cdot \ln\left(\frac{A}{k}\right)$.

Of

- Als $E = 8{,}314T \cdot \ln\left(\frac{A}{k}\right)$ dan moet gelden $\frac{E}{8{,}314T} = \ln\left(\frac{A}{k}\right)$.
- Dan is $\frac{E}{8{,}314T} = \ln(A) - \ln(k)$.
- Dus $\ln(k) = \ln(A) + \frac{-E}{8{,}314T} = \ln(\mathrm{A}) + \ln\left(e^{-\left(\frac{E}{8{,}314T}\right)}\right)$.
- Dus $\ln(k) = \ln\left(A \cdot e^{-\left(\frac{E}{8{,}314T}\right)}\right)$ (en dat komt overeen met de gegeven formule).

2. Functies, grafieken en vergelijkingen

2.1 Formules en functies

-

2.2 Standaardfuncties

2. Wiskunde B VWO 2024, tijdvak 1, vraag 15

Oefenvraag examen 2024 tijdvak 1 – vraag 15

De Wet van Titius-Bode is een wet uit de astronomie die door Johann Titius werd opgesteld in de achttiende eeuw. Deze wet legt een verband tussen het rangnummer van een planeet en de afstand van die planeet tot de zon. Met het rangnummer van een planeet wordt bedoeld: 'de zoveelste planeet geteld vanaf de zon'. De planeet die het dichtst bij de zon staat krijgt nummer 1, de volgende 2 enzovoorts. De wet luidt:

$$a = 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 2^{n-2}$$

Hierin is a de afstand van de planeet tot de zon uitgedrukt in AE (Astronomische Eenheid, 1 AE = afstand van de aarde tot de zon) en is n het rangnummer van de planeet.

Saturnus heeft volgens de Wet van Titius-Bode een afstand van 10 AE tot de zon.
Bereken exact welk rangnummer Saturnus dan zou hebben.

Maximumscore 2 punten

Het juiste antwoord is:

- $10 = 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 2^{n-2}$ geeft $2^{n-2} = 32$
- Hieruit volgt $n - 2 = 5$, dus $n = 7$

Opmerking
Als door systematisch zoeken de juiste waarde van n wordt gevonden, dan mogen voor deze vraag 2 scorepunten worden toegekend.

3. Wiskunde B VWO 2021, tijdvak 2, vraag 8

Oefenvraag examen 2021 tijdvak 2 – vraag 8

Op een spaarrekening wordt een bedrag gestort. Het jaarlijkse rentepercentage op deze spaarrekening is constant. Hierdoor groeit het bedrag op de spaarrekening exponentieel. Voor de spaarder is het interessant om te weten na hoeveel jaar het bedrag is verdubbeld. De verdubbelingstijd is exact te berekenen met de formule

$$T = \frac{\ln(2)}{\ln(1 + \frac{p}{100})}$$

Hierin is *T* de verdubbelingstijd in jaren en p het jaarlijkserentepercentage.

Bewijs dat deze formule voor *T* correct is.

Maximumscore 4 punten

Het juiste antwoord is:

- Bij groeipercentage p hoort groeifactor $1 + \frac{p}{100}$.
- Bij verdubbelingstijd T geldt $(1 + \frac{p}{100})^T = 2$
- $\ln\left(\left(1 + \frac{p}{100}\right)^T\right) = T \cdot \ln(1 + \frac{p}{100})$
- Hieruit volgt $T \cdot \ln(1 + \frac{p}{100}) = \ln(2)$ dus $T = \frac{\ln(2)}{\ln(1+\frac{p}{100})}$

Of:

- Uit $g^T = 2$ volgt $T = {}^{g}\log(2)$
- Dus $T = \frac{\ln(2)}{\ln(g)}$
- Bij groeipercentage p hoort groeifactor ($g =$) $1 + \frac{p}{100}$
- Dus $T = \frac{\ln(2)}{\ln(1+\frac{p}{100})}$

4. Wiskunde B VWO 2015, tijdvak 1, vraag 4

Oefenvraag examen 2015 tijdvak 1 – vraag 4

Aan de sterrenhemel bevinden zich heldere en minder heldere sterren. De **helderheid** van een ster werd in de oudheid reeds aangegeven met een getal, de **magnitude** van de ster. Zeer heldere sterren kregen magnitude 1. Nauwelijks zichtbare sterren kregen magnitude 6. Een kleine waarde betekent dus een grote helderheid. In deze opgave is m de magnitude.

Tegenwoordig meet men de hoeveelheid licht die van een ster wordt ontvangen. De helderheid van een ster wordt dan vaak uitgedrukt in **lux** (een eenheid voor verlichtingssterkte). In deze opgave is L de helderheid in lux.

In de tabel staan voor een aantal helderheden de waarden van m en L.

tabel

m	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
L	$1{,}0 \cdot 10^{-6}$	$4{,}0 \cdot 10^{-7}$	$1{,}6 \cdot 10^{-7}$	$6{,}3 \cdot 10^{-8}$	$2{,}5 \cdot 10^{-8}$	$1{,}0 \cdot 10^{-8}$

Tussen L en m bestaat een exponentieel verband van de vorm $L = 10^{p+qm}$.

Leid uit de tabelgegevens bij $m = 1{,}0$ en $m = 6{,}0$ af dat $p = -5{,}6$ en $q = -0{,}4$.

Maximumscore 4 punten

Het juiste antwoord is:

- Invullen van $m = 1$ en $L = 10^{-6}$ in $L = 10^{p+qm}$ geeft $p + q = -6$.
- Invullen van $m = 6$ en $L = 10^{-8}$ in $L = 10^{p+qm}$ geeft $p + 6q = -8$.
- Beschrijven hoe deze vergelijkingen kunnen worden opgelost.
- $p = -5{,}6$ en $q = -0{,}4$.

Of

- Uit de tabelgegevens volgt voor de groeifactor g: $g^5 = \frac{1{,}0 \cdot 10^{-8}}{1{,}0 \cdot 10^{-6}} = 10^{-2}$.
- Dit geeft $g = 10^{-0{,}4}$, dus geldt $L = b \cdot 10^{-0{,}4m}$.
- Bijvoorbeeld $1{,}0 \cdot 10^{-6} = b \cdot 10^{-0{,}4 \cdot 1}$ geeft $b = 10^{-5{,}6}$.
- $L = 10^{-5{,}6} \cdot 10^{-0{,}4m} = 10^{-5{,}6 - 0{,}4m}$ (, dus $p = -5{,}6$ en $q = -0{,}4$).

Of

- Beschrijven hoe met de GR met behulp van exponentiële regressie een verband tussen L en m kan worden bepaald.
- Het verband is $L = b \cdot g^m$ met $b \approx 2{,}51 \cdot 10^{-6}$ en $g \approx 0{,}40$ (of nauwkeuriger).
- Dit geeft $\log b = -5{,}6$ en $\log g = -0{,}4$.

- Dus $L = 10^{-5,6} \cdot (10^{-0,4})^m = 10^{-5,6 - 0,4m}$ (, dus $p = -5,6$ en $q = -0,4$).

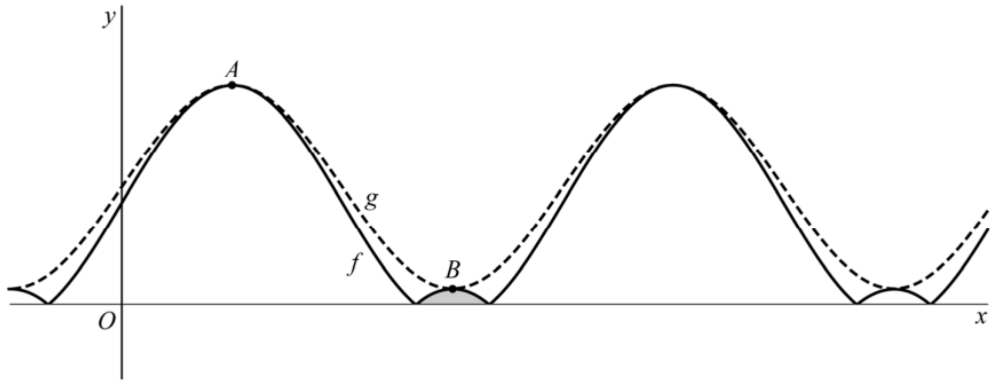
5. Wiskunde B VWO 2023, tijdvak 1, vraag 11

Oefenvraag examen 2023 tijdvak 1 – vraag 11

De functie f wordt gegeven door $f(x) = \left|\sin(x) + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right|$.

In de figuur is de grafiek van f als doorgetrokken lijn weergegeven.

Figuur



In de figuur zijn de toppen A en B van de grafiek van f aangegeven.
A en B zijn de toppen die horen bij de eerste twee maxima van f rechts van de y-as.
Er bestaat een sinusoïde die gegeven wordt door $g(x) = a + b\sin(x)$, waarvan twee opeenvolgende toppen samenvallen met de punten A en B.

De grafiek van g is in de figuur gestippeld weergegeven.
Bereken exact de waarde van a en b.

Maximumscore 3 punten

Het juiste antwoord is:

- De y-coördinaat van A is $1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en de y-coördinaat van B is $1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
  (want $-1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} < 0$).
- Het gemiddelde van $1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}$ is 1 dus $a = 1$.
- Dus $b = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

6. Wiskunde B VWO 2018, tijdvak 1, vraag 8

Oefenvraag examen 2018 tijdvak 1 – vraag 8

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 6\sin(x) - \cos(2x)$.
De grafiek van f heeft oneindig veel toppen.

Bereken exact de x-coördinaten van alle toppen van de grafiek van f.

Maximumscore 6 punten

Het juiste antwoord is:

- $f'(x) = 6\cos(x) + 2\sin(2x)$
- $2\sin(2x) = 4\sin(x)\cos(x)$
- $f'(x) = 0$ geeft $2\cos(x) \cdot (3 + 2in(x)) = 0$
- $3 + 2\sin(x) = 0$ geeft $\sin(x) = -1\frac{1}{2}$; deze vergelijking heeft geen oplossingen.
- $\cos(x) = 0$ geeft $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ (met k geheel).

2.3 Functies en grafieken

-

2.4 Inverse functies

7. Wiskunde B VWO 2025, tijdvak 1, vraag 8

Oefenvraag examen 2025 tijdvak 1 – vraag 8

Voor $x \geq 0$ worden de functies *f* en *g* gegeven door $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 - 1}$ en $g(x) = \sqrt{2x^2 + 2}$.

De functies *f* en *g* zijn elkaars inverse.

Bewijs dat *f* en *g* elkaars inverse zijn.

Maximumscore 3 punten

Het juiste antwoord is:

- Voor punten op de grafiek van *f* geldt: $y = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 - 1}$, dus voor de inverse geldt (door spiegeling in de lijn met vergelijking $y = x$) het verband $x = \sqrt{\frac{1}{2}y^2 - 1}$
- Dit geeft $x^2 + 1 = \frac{1}{2}y^2$
- Herleiden tot $y = \sqrt{2x^2 + 2}$ ($y = -\sqrt{2x^2 + 2}$) voldoet niet) (en dus zijn *f* en *g* elkaars inverse)

Of

- Voor punten op de grafiek van *g* geldt: $y = \sqrt{2x^2 + 2}$, dus voor de inverse geldt (door spiegeling in de lijn met vergelijking $y = x$) het verband $x = \sqrt{2y^2 + 2}$
- Dit geeft $x^2 - 2 = 2y^2$
- Herleiden tot $y = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 - 1}$ ($y = -\sqrt{\frac{1}{2}x^2 - 1}$ voldoet niet) (en dus zijn *f* en *g* elkaars inverse)

Of

- Er moet gelden $g\big(f(x)\big) = x$ $(of\ f\big(g(x)\big) = x)$
- $g\big(f(x)\big) = \sqrt{2\left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right) + 2}$
- Herleiden tot $\sqrt{x^2} = x$ ($\sqrt{x^2} = -x$ voldoet niet) (en dus zijn *f* en *g* elkaars inverse)

8. Wiskunde B VWO 2022, tijdvak 1, vraag 1

Oefenvraag examen 2022 tijdvak 1 – vraag 1

De functies f_p en g_p zijn gegeven door $f_p\,(x) = p\ \ln(x)$ en $g_p(x) = e^{\frac{x}{p}}$, voor $p \neq 0$.

De functies f_p en g_p zijn elkaars inverse.
Bewijs dit.

Maximumscore 3 punten

Het juiste antwoord is:

- (Bij de functie f_p hoort de vergelijking $y = p \cdot \ln(x)$ dus) bij de inverse functie van f_p hoort de vergelijking $x = p \cdot \ln(y)$.
- Dan is $\frac{x}{p} = \ln(y)$, dus $y = e^{\frac{x}{p}}$ (en dat is een vergelijking die past bij g_p).

Of

- (Bij de functie g_p hoort de vergelijking $y = e^{\frac{x}{p}}$ dus) bij de inverse functie van g_p hoort de vergelijking $x = e^{\frac{y}{p}}$.
- Dan is $\frac{y}{p} = \ln(x)$, dus $y = p\ \ln(x)$ (en dat is een vergelijking die past bij f_p).

Of

- Er moet gelden: $g_p(f_p(x)) = x$ (voor alle x).
- $g_p(f_p(x)) = e^{\frac{p\ln(x)}{p}} = e^{\ln(x)} = x$ (dus g_p is de inverse van f_p).

Of

- Er moet gelden: $f_p(g_p(x)) = x$ (voor alle x).
- $f_p(g_p(x)) = p\ \ln\left(e^{\frac{x}{p}}\right) = p \cdot \frac{x}{p} = x$ (dus f_p is de inverse van g_p).

Of

- De standaardfuncties f_1 en g_1 zijn elkaars inverse.
- De grafiek van f_p ontstaat uit de grafiek van f_1 door een vermenigvuldiging met p ten opzichte van de x-as.
- De grafiek van g_p ontstaat uit de grafiek van g_1 door een vermenigvuldiging met p ten opzichte van de y-as (dus f_p en g_p zijn elkaars inverse).

9. Wiskunde B VWO 2021, tijdvak 3, vraag 14

Oefenvraag examen 2021 tijdvak 3 – vraag 14

De functie f wordt gegeven door $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 9$.
Deze functie heeft een inverse functie f^{inv}. Er geldt: $f^{\text{inv}}(x) = -2 + \sqrt[3]{x-1}$.

Bewijs dat inderdaad geldt: $f^{\text{inv}}(x) = -2 + \sqrt[3]{x-1}$.

Maximumscore 3 punten

Het juiste antwoord is:

- (Voor een punt (x, y) op de grafiek van f ligt punt (y, x) op de grafiek van de inverse van f, dus er geldt) $x = -2 + \sqrt[3]{y-1}$.
- Dus $x + 2 = \sqrt[3]{y-1}$, dus $(x + 2)^3 = y - 1$, dus $y = (x + 2)^3 + 1$.
- Dit is gelijk aan $(x + 2)^2 \cdot (x + 2) + 1 = (x^2 + 4x + 4) \cdot (x + 2) + 1 = x^3 + 6x^2 + 12x + 9$ (= $f(x)$), dus geldt inderdaad $f^{\text{inv}}(x) = -2 + \sqrt[3]{x-1}$.

Of:

- (Voor een punt (x, y) op de grafiek van de inverse van f ligt punt (y, x) op de grafiek van f, dus er geldt) $x = y^3 + 6y^2 + 12y + 9$.
- $(y + 2)^3 = (y + 2)^2(y + 2) = (y^2 + 4y + 4)(y + 2) = y^3 + 6y^2 + 12y + 8$, dus $x = (y + 2)^3 + 1$.
- Herleiden geeft $y = -2 + \sqrt[3]{x-1}$ (dus geldt inderdaad $f^{\text{inv}}(x) = -2 + \sqrt[3]{x-1}$).

Of:

- $f(f^{\text{inv}}(x)) = (-2 + \sqrt[3]{x-1})^3 + 6 \cdot (-2 + \sqrt[3]{x-1})^2 + 12 \cdot (-2 + \sqrt[3]{x-1}) + 9$.
- $(-2 + \sqrt[3]{x-1})^3 = -8 + 3 \cdot 4 \cdot \sqrt[3]{x-1}) + 3 \cdot -2 \cdot (\sqrt[3]{x-1})^2 + x - 1$.
- De rest van de herleiding van $f(f^{\text{inv}}(x))$ tot x (dus geldt inderdaad $f^{\text{inv}}(x) = -2 + \sqrt[3]{x-1}$).

10. Wiskunde B VWO 2018, tijdvak 1, vraag 12

Oefenvraag examen 2018 tijdvak 1 – vraag 12

De functie f wordt gegeven door $f(x) = \ln(\sqrt{x})$.

Deze functie heeft een inverse functie f^{inv}. Er geldt: $f^{inv}(x) = e^{2x}$.

Bewijs dat inderdaad geldt $f^{inv}(x) = e^{2x}$.

Maximumscore 3 punten

Het juiste antwoord is:

- (Voor een punt (x, y) op de grafiek van f^{inv} geldt) $x = \ln(\sqrt{y})$.
- Dus $e^x = \sqrt{y}$).
- Hieruit volgt $f^{inv}(x) = (e^x)^2$, dus $f^{inv}(x) = e^{2x}$.

Of:

- (Voor een punt (x, y) op de grafiek van f^{inv} geldt) $x = \ln(\sqrt{y})$.
- ($x = \ln\left(y^{\frac{1}{2}}\right)$, dus) $x = \frac{1}{2}\ln(y)$, dus $2x = \ln(y)$.
- Hieruit volgt $f^{inv}(x) = e^{2x}$.

Of:

- f is de samengestelde functie van $y = \sqrt{x}$ en $y = \ln(x)$.
- f^{inv} is dus de samengestelde functie van $y = e^x$ en $y = x^2$.
- Hieruit volgt $f^{inv}(x) = (e^x)^2$, dus $f^{inv}(x) = e^{2x}$.

2.5 Vergelijkingen en ongelijkheden

-

2.6 Asymptoten en limietgedrag van functies

11. Wiskunde B VWO 2021, tijdvak 1, vraag 10

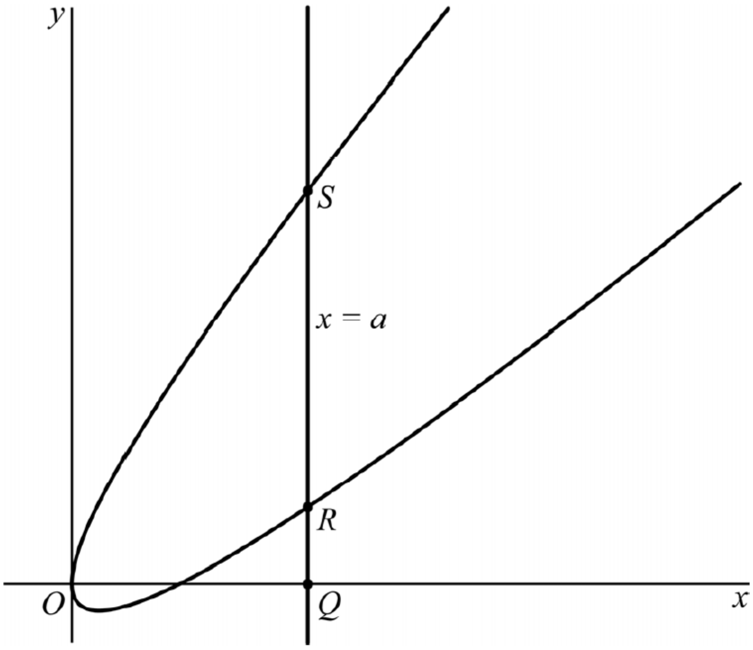
Oefenvraag examen 2021 tijdvak 1 – vraag 10

De beweging van een punt P wordt beschreven door de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^2 - 2t \end{cases}$$

Gegeven is de lijn met vergelijking $x = a$, waarbij $a > 0$. Deze lijn snijdt de x-as in punt Q en de baan van P in de punten R en S, waarbij de y-coördinaat van S groter is dan de y-coördinaat van R. Zie de figuur.

Figuur



Als a onbegrensd toeneemt, nadert de verhouding $\frac{QR}{QS}$ tot een limiet.

Bereken exact deze limiet.

Maximumscore 4 punten

Het juiste antwoord is:

- $t^2 = a$ geeft $t = -\sqrt{a}$ of $t = \sqrt{a}$.
- $y_S = y(-\sqrt{a}) = a + 2\sqrt{a}$ en $y_R = y(\sqrt{a}) = a - 2\sqrt{a}$.
- $\frac{QR}{QS} = \frac{a-2\sqrt{a}}{a+2\sqrt{a}} = \frac{1-\frac{2}{\sqrt{a}}}{1+\frac{2}{\sqrt{a}}}$
- ($\frac{2}{\sqrt{a}}$ nadert naar 0 als a onbegrensd toeneemt, dus) de limiet is 1 (of $\lim\limits_{a \to \infty} \frac{1-\frac{2}{\sqrt{a}}}{1+\frac{2}{\sqrt{a}}} = 1$).

12. Wiskunde B VWO 2023, tijdvak 1, vraag 17

Oefenvraag examen 2023 tijdvak 1 – vraag 17

De functie f wordt gegeven door $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$.

De grafiek van f heeft twee horizontale asymptoten.

Bereken exact de afstand tussen deze twee horizontale asymptoten.

Maximumscore 3 punten

Het juiste antwoord is:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ en $\lim\limits_{x \to \infty} \mathrm{e}^x = \infty$.
- Een exacte berekening waaruit de vergelijking van de eerste asymptoot volgt.
- Een exacte berekening waaruit de vergelijking van de tweede asymptoot volgt, dus de gevraagde afstand is 1.

Of

- Als x onbeperkt afneemt, dan nadert e^x naar 0 en als x onbeperkt toeneemt, dan neemt e^x onbeperkt toe.
- Als x onbeperkt afneemt, dan nadert $\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$ naar 1.
- Als x onbeperkt toeneemt, dan nadert $\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$ naar 0 en dus is de gevraagde afstand 1.

13. Wiskunde B VWO 2021, tijdvak 1, vraag 11

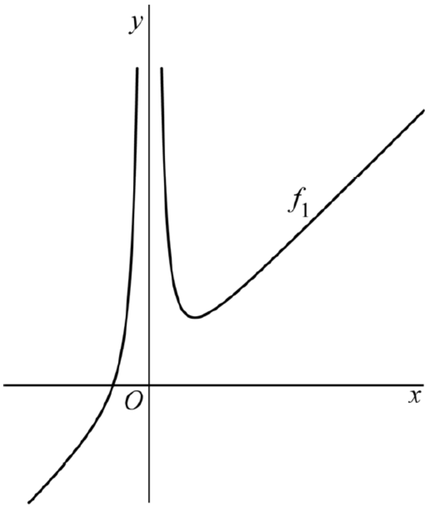
Oefenvraag examen 2021 tijdvak 1 – vraag 11

Voor $p > 0$ wordt de functie f_p gegeven door:

$$f_p(x) = \frac{x^3 + 4p}{x^2}$$

In de figuur is de grafiek van f_1 weergegeven.

Figuur



De grafiek van f_1 heeft een scheve asymptoot.
Bewijs dat de grafiek van f_1 boven deze scheve asymptoot ligt.

Maximumscore 3 punten

Het juiste antwoord is:

- $f_1(x) = x + \frac{4}{x^2}$
- (Als x onbegrensd toeneemt, nadert $\frac{4}{x^2}$ tot 0, dus) de vergelijking van de scheve asymptoot is $y = x$.
- Omdat ($4 > 0$ en) $x^2 > 0$, geldt $x + \frac{4}{x^2} > x$ (dus ligt de grafiek van f_1 boven de scheve asymptoot).

14. Wiskunde B VWO 2024, tijdvak 1, vraag 13

Oefenvraag examen 2024 tijdvak 1 – vraag 13

Voor elke waarde van a wordt de functie f_a gegeven door:

$$f_a(x) = \frac{ax^2 - 2}{x^2 + a}$$

Er bestaat geen waarde van a waarvoor de grafiek van f_a een perforatie heeft.
Bewijs dit.

Maximumscore 4 punten

Het juiste antwoord is:

- (Als er een perforatie is, dan moet in dit geval gelden:) teller en noemer moeten (voor dezelfde waarde van *x*) gelijk zijn aan nul
- De noemer is nul als $x^2 = -a$
- De teller is dan $-a^2 - 2 = 0$
- Een berekening of redenering waaruit volgt dat de vergelijking $a^2 - 2 = 0$ geen oplossingen heeft (; dus voor geen waarde van *a* is er een perforatie)

Of

- (Als er een perforatie is, dan moet in dit geval gelden:) teller en noemer moeten (voor dezelfde waarde van *x*) gelijk zijn aan nul
- De teller is nul als $x^2 = \frac{2}{a}$ ($a = 0$ voldoet niet)
- De noemer is nul als $x^2 = -a$
- Een berekening of redenering waaruit volgt dat de vergelijking $\frac{2}{a} = -a$ geen oplossingen heeft (; dus voor geen waarde van *a* is er een perforatie)

Of

- (Als er een perforatie is, dan moet in dit geval gelden:) teller en noemer moeten (voor dezelfde waarde van *x*) gelijk zijn aan nul
- De teller is nul als $x^2 = \frac{2}{a}$ ($a = 0$ voldoet niet)
- De noemer is dan $\frac{2}{a} + a$
- Een berekening of redenering waaruit volgt dat de vergelijking $\frac{2}{a} + a = 0$
- geen oplossingen heeft (; dus voor geen waarde van *a* is er een perforatie)

Of

- (Als er een perforatie is, dan moet in dit geval gelden:) teller en noemer moeten (voor dezelfde waarde van x) gelijk zijn aan nul
- Een berekening of beredenering waaruit volgt: als $a < 0$ dan kan de teller niet nul zijn
- Een berekening of beredenering waaruit volgt: als $a > 0$ dan kan de noemer niet nul zijn
- Voor $a = 0$ is de teller (gelijk aan -2 , dus) ongelijk aan nul (; dus voor geen waarde van a is er een perforatie)

15. Wiskunde B VWO 2017 (pilot), tijdvak 1, vraag 15

Oefenvraag pilot examen 2017 tijdvak 1 – vraag 15

Voor elke waarde van p, met $p \neq 0$, is de functie f_p gegeven door:

$$f_p(x) = \frac{px^2 + 4px + 6}{(x^2 + 1)(x - 2)}$$

Er is één waarde van p waarvoor de grafiek van f_p een perforatie heeft.

Bereken exact de coördinaten van die perforatie.

Maximumscore 6 punten

Het juiste antwoord is:

- $(x^2 + 1)(x - 2) = 0$ geeft $x = 2$ (want $x^2 + 1 = 0$ heeft geen oplossing).
- $x = 2$ invullen in $px^2 + 4px + 6$ geeft $4p + 8p + 6$ (= $12p + 6$).
- $12p + 6 = 0$ geeft $p = -\frac{1}{2}$ (dus voor $p = -\frac{1}{2}$ heeft de grafiek van f_p een perforatie).
- $f_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{(x-2)(-\frac{1}{2}x-3)}{(x^2+1)(x-2)}$.
- $f_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{-\frac{1}{2}x-3}{x^2+1}$ (voor $x \neq 2$).
- De coördinaten van de perforatie zijn $(2, -\frac{4}{5})$ (want $\lim_{x \to 2} f_{-\frac{1}{2}}(x) = -\frac{4}{5}$).

Of

- Herleiden van de teller tot $(x - 2)(px + 6p) + 12p + 6$.
- $12p + 6 = 0$ geeft $p = -\frac{1}{2}$ (dus voor $p = -\frac{1}{2}$ heeft de grafiek van f_p een perforatie).
- $f_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{(x-2)(-\frac{1}{2}x-3)}{(x^2+1)(x-2)}$.
- $f_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{-\frac{1}{2}x-3}{x^2+1}$ (voor $x \neq 2$).
- De coördinaten van de perforatie zijn $(2, -\frac{4}{5})$ (want $\lim_{x \to 2} f_{-\frac{1}{2}}(x) = -\frac{4}{5}$).

Of

- $px^2 + 4px + 6 = 0$ geeft $x = \frac{-4p \pm \sqrt{16p^2 - 24p}}{2p}$.
- $(x^2 + 1)(x - 2) = 0$ geeft $x = 2$ (want $x^2 + 1 = 0$ heeft geen oplossing) (dus er is een perforatie bij $x = 2$), dus er moet gelden $\frac{-4p \pm \sqrt{16p^2 - 24p}}{2p} = 2$.
- Dit geeft $p = -\frac{1}{2}$.
- $f_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{(x-2)(-\frac{1}{2}x-3)}{(x^2+1)(x-2)}$.
- $f_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{-\frac{1}{2}x-3}{x^2+1}$ (voor $x \neq 2$).
- De coördinaten van de perforatie zijn $(2, -\frac{4}{5})$ (want $\lim_{x \to 2} f_{-\frac{1}{2}}(x) = -\frac{4}{5}$).

3. Differentiaal- en integraalrekening

3.1 Afgeleide functies

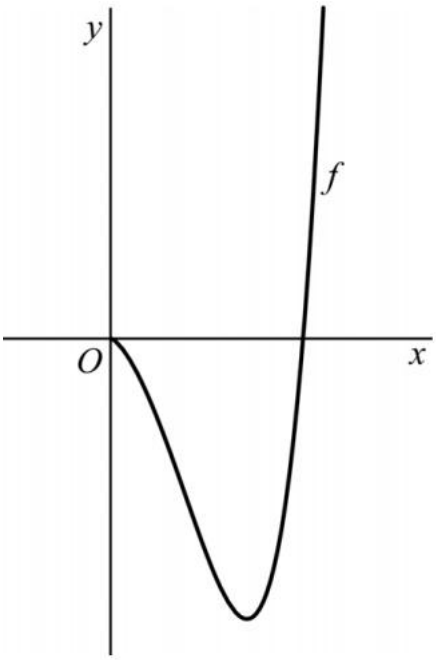
16. Wiskunde B VWO 2024, tijdvak 1, vraag 1

Oefenvraag examen 2024 tijdvak 1 – vraag 1

De functie *f* wordt gegeven door $f(x) = x^5 - 3x\sqrt{x}$

In figuur 1 is de grafiek van *f* weergegeven.

figuur 1



Op de grafiek ligt het punt *A*(1, –2).
Bewijs dat de grafiek van *f* in *A* stijgt.

Maximumscore 3 punten

Het juiste antwoord is:

- $f(x) = x^5 - 3x^{1\frac{1}{2}}$
- $f(x) = 5x^4 - 4\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$
- $f'(1) = \frac{1}{2}$ en dit is groter dan 0 (dus de grafiek van *f* stijgt in *A*)

Opmerking
Als in het derde antwoordelement de positieve x-coördinaat van de top van de grafiek van f wordt berekend, gevolgd door een exact argument, waaruit volgt dat deze x-coördinaat kleiner is dan 1, dan mag het derde scorepunt worden toegekend.

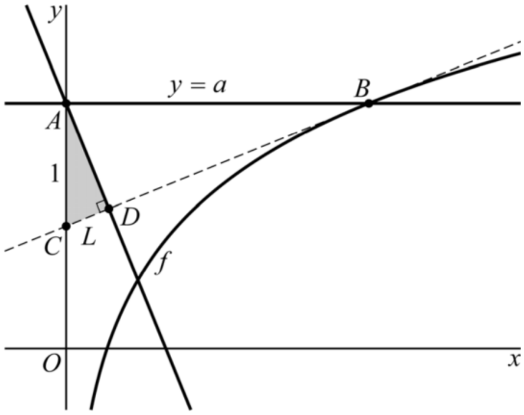
17. Wiskunde B VWO 2025, tijdvak 2, vraag 10

en oplossen, en 4) controleren of je daadwerkelijk in een minimum/maximum zit.

Oefenvraag examen 2025 tijdvak 2 – vraag 10

De lijn door A loodrecht op de raaklijn BC snijdt deze raaklijn in punt D.
In figuur 3 is voor een waarde van a de rechthoekige driehoek ACD grijs weergegeven.

Figuur 3



Als a varieert, varieert de lengte van zijde CD.
Als L de lengte van zijde CD is, dan geldt voor de oppervlakte van de driehoek:
Opp(ACD) = $\frac{1}{2}\sqrt{L^2 - L^4}$
Bereken exact de maximale oppervlakte van driehoek ACD.

Maximumscore 5 punten

Het juiste antwoord is:

- $\frac{d(L^2-L^4)}{dL} = 2L - 4L^3$
- Opp'(ACD) = $\frac{2L-4L^3}{4\sqrt{L^2-L^4}}$
- Opp(ACD) is maximaal als $2L - 4L^3 = 0$
- De oppervlakte van driehoek ACD is maximaal voor $L^2 = \frac{1}{2}$
- De maximale oppervlakte is $\frac{1}{4}$

Of

- Opp(ACD) is maximaal als $L^2 - L^4$ maximaal is
- $\frac{d(L^2-L^4)}{dL} = 2L - 4L^3$
- Opp(*ACD*) is maximaal als $2L - 4L^3 = 0$
- De oppervlakte van driehoek *ACD* is maximaal voor $L^2 = \frac{1}{2}$
- De maximale oppervlakte is $\frac{1}{4}$

18. Wiskunde B VWO 2025, tijdvak 1, vraag 1

Oefenvraag examen 2025 tijdvak 1 – vraag 1

De vierdegraadsfunctie f wordt gegeven door $f(x) = x^4 - 30x^2$.
De grafiek van f heeft twee buigpunten met dezelfde y-coördinaat.
De y-coördinaat van de buigpunten is -125.

Bewijs dat de y-coördinaat van de buigpunten -125 is.

Maximumscore 5 punten

Het juiste antwoord is:

- $f'(x) = 4x^3 - 60x$
- $f''(x) = 12x^2 - 60$
- $f'(x) = 0 \; als \; x^2 = 5$
- Dus de y-coördinaat van de buigpunten is $(5^2 - 30 \cdot 5 =) - 125$

3.2 Technieken voor differentiëren

19. Wiskunde B VWO 2022, tijdvak 2, vraag 1

Oefenvraag examen 2022 tijdvak 2 – vraag 1

De functie f is gegeven door $f(x) = 2(2x-1)^3 + 3(2x-1)^2$.
Voor de afgeleide geldt: $f'(x) = 48x^2 - 24x$.
Bewijs dit.

Maximumscore 4 punten

Het juiste antwoord is:

- $f'(x) = 6(2x-1)^2 \cdot 2 + 6(2x-1) \cdot 2$
- Herleiden tot $f'(x) = 12(4x^2 - 4x + 1) + 24x - 12$.
- Herleiden tot $f'(x) = 48x^2 - 24x$.

Of

- $(2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$.
- $(2x-1)^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$.
- $f(x)$ herleiden tot $f(x) = 16x^3 - 12x^2 + 1$.
- $f'(x) = 48x^2 - 24x$.

20. Wiskunde B VWO 2013, tijdvak 1, vraag 15, 16 en 17

Oefenvraag examen 2013 tijdvak 1 – vraag 15 t/m 17

De functie f is gegeven door $f(x) = (x^2 + 1) \cdot e^x$.

Voor de afgeleide geldt: $f'(x) = (x + 1)^2 \cdot e^x$.
Vraag 15: Toon dit op algebraïsche wijze aan.

De functie f heeft geen nulpunten en ook geen extremen.
Vraag 16: Toon dit op algebraïsche wijze aan.

De grafiek van f heeft wel twee buigpunten.
Vraag 17: Bereken exact de x-coördinaten van deze buigpunten.

Maximumscore 3 punten (vraag 15)

Maximumscore 4 punten (vraag 16)

Maximumscore 4 punten (vraag 17)

Het juiste antwoord is:

Vraag 15

- $f'(x) = 2x \cdot \mathrm{e}^x + (x^2 + 1) \cdot \mathrm{e}^x$.
- $2x \cdot \mathrm{e}^x + (x^2 + 1) \cdot \mathrm{e}^x = (x^2 + 2x + 1) \cdot \mathrm{e}^x$.
- $(x^2 + 2x + 1) \cdot \mathrm{e}^x = (x + 1)^2 \cdot \mathrm{e}^x$.

Vraag 16

- $x^2 + 1 > 0$ en $\mathrm{e}^x > 0$ voor alle x, dus $f(x) > 0$ voor alle x (dus f heeft geen nulpunten).
- $f'(x) = 0$ geeft $x = -1$.
- Laten zien (bijvoorbeeld met behulp van getallenvoorbeelden) dat $f'(x) > 0$ voor $x < -1$ en voor $x > -1$.
- Dan volgt: f is zowel links als rechts van $x = -1$ stijgend, dus f heeft geen extremen.

Of

- $x^2 + 1 > 0$ en $\mathrm{e}^x > 0$ voor alle x, dus $f(x) > 0$ voor alle x (dus f heeft geen nulpunten).
- $f'(x)$ heeft alleen een nulpunt voor $x = -1$.
- Dit is een dubbel nulpunt.
- $f'(x)$ wisselt niet van teken, dus f heeft geen extremen.

Of

- $x^2 + 1 > 0$ en $e^x > 0$ voor alle x, dus $f(x) > 0$ voor alle x (dus f heeft geen nulpunten).
- Voor alle x geldt $(x + 1)^2 \geq 0$ en $e^x > 0$, dus $f'(x) \geq 0$.
- $f'(x)$ wisselt niet van teken, dus f heeft geen extremen.

Vraag 17

- $f''(x) = 2(x + 1) \cdot e^x + (x + 1)^2 \cdot e^x$.
- Uit $f''(x) = 0$ volgt $x^2 + 4x + 3 = 0$.
- Dit geeft $(x + 3)(x + 1) = 0$.
- De x-coördinaten van de buigpunten zijn –1 en –3.

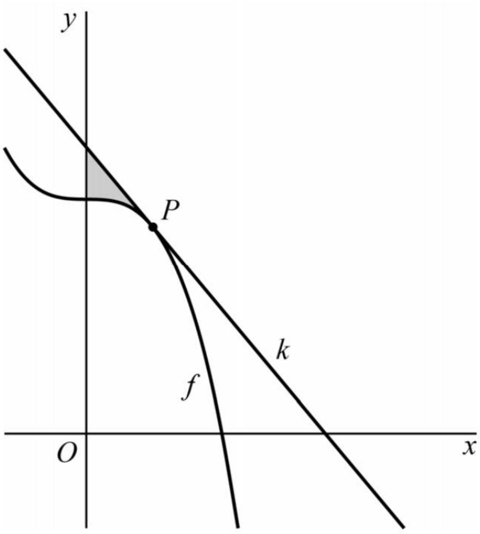
3.3 Integraalrekening

21. Wiskunde B VWO 2024, tijdvak 2, vraag 2

Oefenvraag examen 2024 tijdvak 2 – vraag 2

De lijn k heeft vergelijking $y = -12x + 88$.
Lijn k raakt aan de grafiek van f in het punt P rechts van de y-as. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, lijn k en de y-as. In figuur 2 is dit vlakdeel grijs weergegeven.

Figuur 2



Bereken exact de oppervlakte van V.

Maximumscore 5 punten

Het juiste antwoord is:

- $f'(x) = -3x^2$
- $-3x^2 = -12$ geeft $x = 2$ ($x = -2$ voldoet niet)
- De integraal $\int_0^2 (-12x + 88 - (72 - x^3))\,dx$ moet worden berekend
- Een primitieve van $x^3 - 12x + 16$ is $\frac{1}{4}x^4 - 6x^2 + 16x$
- Invullen van de grenzen geeft oppervlakte 12

22. Wiskunde B VWO 2023, tijdvak 1, vraag 2

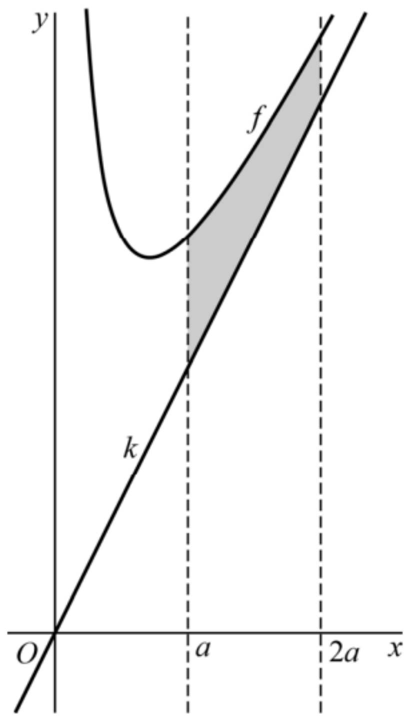
Oefenvraag examen 2023 tijdvak 1 – vraag 2

De functie *f* wordt voor $x > 0$ gegeven door $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$.

Lijn *k* is de scheve asymptoot van de grafiek van *f*.

Het vlakdeel *V* wordt ingesloten door de grafiek van *f*, lijn *k* en de lijnen met vergelijking $x = a$ en $x = 2a$ met $a = 0$. In de figuur is dit vlakdeel voor een zekere waarde van *a* grijsgemaakt.

Figuur



De oppervlakte van dit vlakdeel is onafhankelijk van de waarde van *a*.

Bewijs dit.

Maximumscore 5 punten

Het juiste antwoord is:

- ($\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ dus) een vergelijking van de asymptoot *k* is $y = 2x$.
- De integraal $\int_a^{2a} \left(2x + \frac{1}{x} - 2x\right) \mathrm{d}x = \int_a^{2a} \frac{1}{x} \mathrm{d}x$ moet worden berekend.
- Een primitieve van $\frac{1}{x}$ is $\ln(x)$ ($x > 0$).
- De oppervlakte is $\ln(2a) - \ln(a)$.

- $\ln(2a) - \ln(a) = \ln(2)$ (en dat is onafhankelijk van a).

Of

- ($\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ dus) een vergelijking van de asymptoot k is $y = 2x$.
- De integraal $\int_{a}^{2a} \left(2x + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$ min de oppervlakte van het trapezium (ingesloten door de x-as, de asymptoot en de lijnen $x = a$ en $x = 2a$) moet worden berekend.
- Een primitieve van f is $x^2 + \ln(x)$ ($x > 0$).
- De oppervlakte is $4a^2 + \ln(2a) - a^2 - \ln(a) - \frac{1}{2}a(2a+4a)$ (of een gelijkwaardige uitdrukking).
- Dit herleiden tot $\ln(2a) - \ln(a) = \ln(2)$ (en dat is onafhankelijk van a).

23. Wiskunde B VWO 2023, tijdvak 1, vraag 18

Oefenvraag examen 2023 tijdvak 1 – vraag 18

De functie f wordt gegeven door $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$.

Een primitieve van f is $F(x) = x - \ln(e^x + 1)$.

Bewijs dit.

Maximumscore 3 punten

Het juiste antwoord is:

- $F'(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x+1}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) = 2 punten.
- $1 - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x+1}{e^x+1} - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1}{e^x+1}$ (= $f(x)$)
  (dus is $F(x)$ een primitieve van $f(x)$).

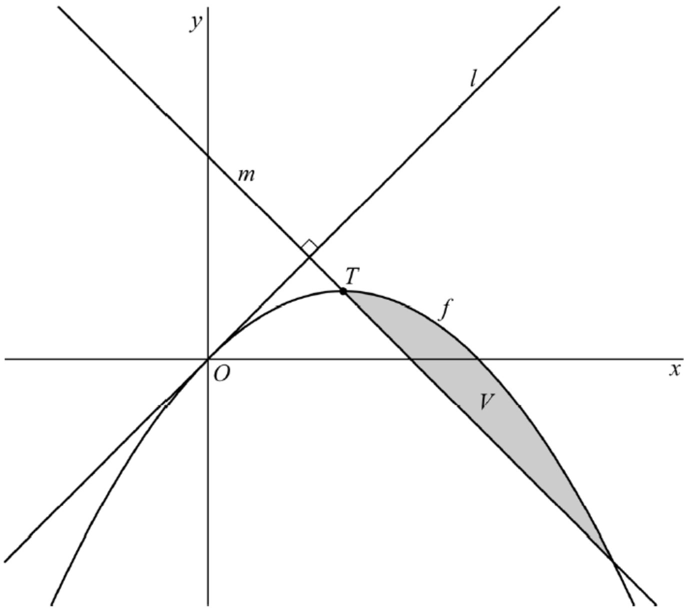
Opmerking:
Als in het eerste antwoordelement de kettingregel niet is gebruikt, mogen voor dit antwoordelement geen scorepunten worden toegekend. Als de kettingregel wel is gebruikt, maar niet correct, mag voor dit antwoordelement hoogstens 1 scorepunt worden toegekend op basis van vakspecifieke regel 1.

24. Wiskunde B VWO 2021, tijdvak 1, vraag 1

Oefenvraag examen 2021 tijdvak 1 – vraag 1

De functie f wordt gegeven door $f(x) = x - x^2$.
Het punt $T\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ is de top van de grafiek van f.
De lijn l is de raaklijn aan de grafiek van f in de oorsprong.
De lijn m staat loodrecht op lijn l en gaat door T.
V is het vlakdeel dat wordt ingesloten door lijn m en de grafiek van f. Zie de figuur.

figuur



Bereken exact de oppervlakte van V.

Maximumscore 8 punten

Het juiste antwoord is:

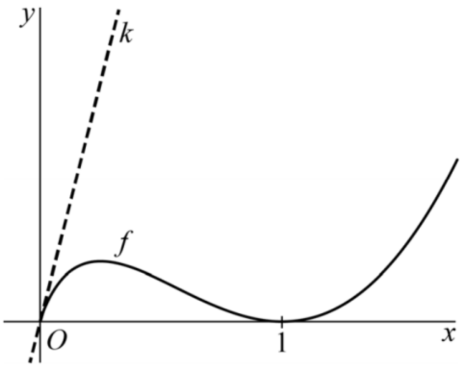
- $f'(x) = 1 - 2x$, dus $rc_l = f'(0) = 1$.
- ($rc_l \cdot rc_m = -1$, dus) $rc_m = -1$.
- $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ invullen in $y = -x + b$ geeft voor m de vergelijking $y = -x + \frac{3}{4}$.
- Uit $-x + \frac{3}{4} = x - x^2$ volgt $x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0$.
- Exact oplossen geeft $x = 1\frac{1}{2}$ ($x = \frac{1}{2}$ geeft T).
- De oppervlakte van V is gelijk aan $\int_{\frac{1}{2}}^{1\frac{1}{2}} \left((x - x^2) - \left(-x + \frac{3}{4}\right)\right) dx$.
- Een primitieve van $-x^2 + 2x - \frac{3}{4}$ is $-\frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{3}{4}x$.
- Invullen van de grenzen geeft: de oppervlakte van V is $\frac{1}{6}$.

25. Wiskunde B VWO 2022, tijdvak 1, vraag 10

Oefenvraag examen 2022 tijdvak 1 – vraag 10

De functie f is gegeven door $f(x) = x^2 - 2x\sqrt{x} + x$ met $x \geq 0$.
In de figuur is de grafiek van f met haar raaklijn k in de oorsprong weergegeven.
De grafiek van f heeft de punten (0, 0) en (1, 0) gemeenschappelijk met de x-as.

Figuur



Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f en de x-as.

Maximumscore 4 punten

Het juiste antwoord is:

- De gevraagde oppervlakte is gelijk aan $\int_0^1 (x^2 - 2x\sqrt{x} + x)dx$.
- Een primitieve van $x^2 - 2x\sqrt{x} + x$ is $\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x^2$.
- De oppervlakte is gelijk aan $\frac{1}{30}$.

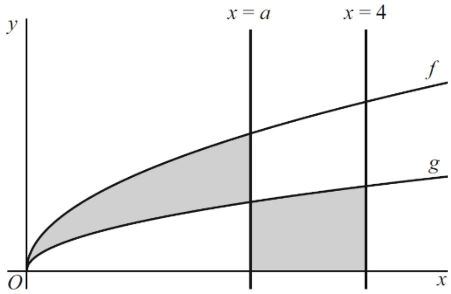
26. Wiskunde B VWO 2015 (pilot), tijdvak 1, vraag 1

Oefenvraag pilot examen 2015 tijdvak 1 – vraag 1

In figuur 1 zijn de grafieken getekend van de functies f en g gegeven door $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$.
Verder zijn de lijnen getekend met vergelijkingen $x = a$ en $x = 4$, met $0 < a < 4$.

In figuur 1 zijn twee vlakdelen grijs gemaakt. Het ene grijze vlakdeel wordt begrensd door de grafieken van f en g en de lijn met vergelijking $x = a$. Het andere grijze vlakdeel wordt begrensd door de grafiek van g, de x-as en de lijnen met vergelijkingen $x = a$ en $x = 4$.

figuur 1



Bereken exact voor welke waarde van a deze vlakdelen gelijke oppervlakte hebben.

Maximumscore 6 punten

Het juiste antwoord is:

- (De grafieken van f en g snijden elkaar in (0,0) dus) er moet gelden: $\int_0^a (\sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x})dx$ $= \int_a^4 \frac{1}{2}\sqrt{x}\,dx$ (ofwel $\int_0^a \frac{1}{2}\sqrt{x}\,dx = \int_a^4 \frac{1}{2}\sqrt{x}\,dx$.
- Een primitieve van $\frac{1}{2}\sqrt{x}$ is $\frac{1}{3}x^{3/2}$.
- Invullen van de grenzen geeft $\frac{1}{3}a^{3/2} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3}a^{3/2}$.
- Dit geeft $a^{3/2} = 4$.
- Dus $a = \sqrt[3]{16}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking).

Of

- Wegens $f(x) = 2 \cdot g(x)$ zijn de begrensde vlakdelen links van $x = a$ even groot en rechts van $x = a$ ook, dus moeten de vier begrensde vlakdelen even groot zijn.
- Er moet gelden: $\int_0^a \sqrt{x}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^4 \sqrt{x}\,dx$ (of $\int_0^a \sqrt{x}\,dx = \int_0^4 \sqrt{x}\,dx$.
- Een primitieve van $\sqrt{x}$ is $\frac{2}{3}x^{3/2}$.
- Invullen van de grenzen geeft $\frac{2}{3}a^{3/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{3}$ (of $\frac{2}{3}a^{3/2} = \frac{16}{3} - \frac{2}{3}a^{3/2}$).
- Dit geeft $a^{3/2} = 4$.
- Dus $a = \sqrt[3]{16}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking).

Of

- De oppervlakte van het ene vlakdeel is $\int_0^a (\sqrt{x - \frac{1}{2}\sqrt{x}})dx = \int_0^a \frac{1}{2}\sqrt{x\,dx}$.
- $\int_0^a \frac{1}{2}\sqrt{x\,dx}$ = $[\frac{1}{3}x^{3/2}]_0^a$ = $\frac{1}{3}a^{3/2}$.
- De oppervlakte van het andere vlakdeel is $\int_a^4 \frac{1}{2}\sqrt{x\,dx}$.
- $\int_a^4 \frac{1}{2}\sqrt{x\,dx}$ = $[\frac{1}{3}x^{3/2}]_a^4$ = $\frac{8}{3} - \frac{1}{3}a^{3/2}$.
- $\frac{1}{3}a^{3/2}$ = $\frac{8}{3} - \frac{1}{3}a^{3/2}$ geeft $a^{3/2}$ = 4.
- Dus a = $\sqrt[3]{16}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking).

27. Wiskunde B VWO 2017 (pilot), tijdvak 1, vraag 10

Oefenvraag pilot examen 2017 tijdvak 1 – vraag 10

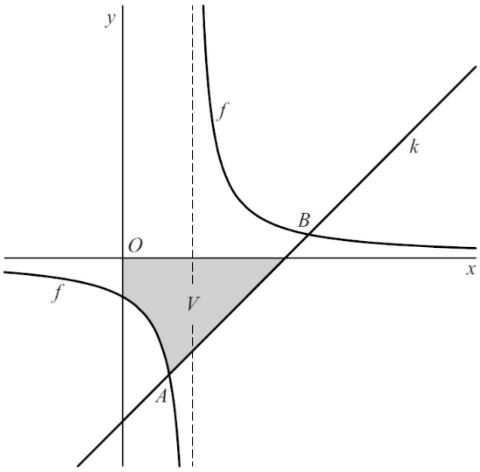
De functie f is gegeven door: $f(x) = \frac{5}{4x-6}$.

De lijn k met vergelijking $y = x - 3\frac{1}{2}$ snijdt de grafiek van f in twee punten, A en B. De coördinaten van punt A zijn $(1, -2\frac{1}{2})$.

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as, de y-as en de lijn k.

In het figuur hiernaast is dit vlakdeel grijs gemaakt. V wordt gewenteld om de x-as. Zo ontstaat een omwentelingslichaam.

Bereken exact de inhoud van dit omwentelingslichaam.



Maximumscore 5 punten

Het juiste antwoord is:

- De inhoud van het linkerdeel is gelijk aan $\pi \cdot \int_0^1 \left(\frac{5}{4x-6}\right)^2 dx$.
- De inhoud van het rechterdeel is gelijk aan $\pi \cdot \int_1^{3\frac{1}{2}} \left(x - 3\frac{1}{2}\right)^2 dx$.
- Een primitieve van $\left(\frac{5}{4x-6}\right)^2$ is $\frac{-25}{4(4x-6)}$.
- Een primitieve van $(x - 3\frac{1}{2})^2$ is $\frac{1}{3}(x - 3\frac{1}{2})^3$.
- De inhoud is $(2\frac{1}{12}\pi + 5\frac{5}{24}\pi =)\ 7\frac{7}{24}\pi$.

Of:

- De inhoud van het linkerdeel is gelijk aan $\pi \cdot \int_0^1 \left(\frac{5}{4x-6}\right)^2 dx$.
- Een primitieve van $\left(\frac{5}{4x-6}\right)^2$ is $\frac{-25}{4(4x-6)}$.
- De inhoud van het rechterdeel is gelijk aan de inhoud van de kegel die ontstaat door lijn k van $x = 1$ tot $x = 3\frac{1}{2}$ om de x-as te wentelen.
- De hoogte van de kegel is $2\frac{1}{2}$, de straal van het grondvlak G is $(|-2\frac{1}{2}|) = 2\frac{1}{2}$, de inhoud van de kegel is te berekenen met $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.
- De inhoud is $(2\frac{1}{12}\pi + 5\frac{5}{24}\pi =)\ 7\frac{7}{24}\pi$.

4. Goniometrische functies

4.1 Goniometrische functies

28. Wiskunde B VWO 2015, tijdvak 1, vraag 10

Oefenvraag examen 2015 tijdvak 1 – vraag 10

Voor elke a met $-\frac{1}{2}\pi < a < \frac{1}{2}\pi$ wordt de functie f_a gegeven door $f_a(x) = \sin x \cdot \sin(x - a)$ met domein $[0, \pi]$.

De afgeleide functie van f_a kan worden geschreven als $f_a'(x) = \sin(2x - a)$.
Bewijs dit.

Maximumscore 3 punten

Het juiste antwoord is:

- $f_a'(x) = \cos x \cdot \sin(x - a) + \sin x \cdot \cos(x - a)$.
- Dan volgt $f_a'(x) = \sin(x + x - a) = \sin(2x - a)$.

Of

- $f_a'(x) = -\frac{1}{2}(\cos(2x - a) - \cos a)$.
- $f_a'(x) = -\frac{1}{2}(-2\sin(2x - a)) = \sin(2x - a)$.

5. Meetkunde met coördinaten

5.1 Meetkundige vaardigheden

29. Wiskunde B VWO 2023, tijdvak 1, vraag 15

Oefenvraag examen 2023 tijdvak 1 – vraag 15

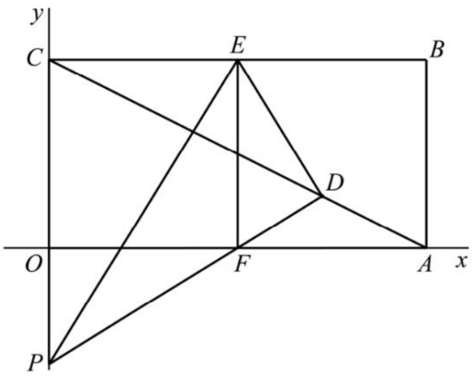
Gegeven is rechthoek $OABC$ met $O(0, 0)$, $A(8, 0)$ en $C(0, 4)$.

De punten F en E zijn de middens van respectievelijk OA en BC. Op de negatieve y-as ligt punt $P(0, p)$. Punt D is het snijpunt van het verlengde van lijnstuk PF en lijnstuk AC. Zie figuur 1.

De lijn door E en F is de bissectrice van hoek PED.

Bewijs dit voor het geval $p = -2$.

figuur 1



Maximumscore 5 punten

Het juiste antwoord is:

- Een vergelijking van AC is $x + 2y = 8$ (of een gelijkwaardige uitdrukking).
- Een vergelijking van PF is $x - 2y = 4$ (of een gelijkwaardige uitdrukking).
- Dan volgt dat de coördinaten van D (6,1) zijn.
- $\overrightarrow{EP} = \binom{-4}{-6}$ en $\overrightarrow{ED} = \binom{2}{-3}$
- $$\cos(\angle(\overrightarrow{EP}, \overrightarrow{EF})) = \frac{\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right|} = \frac{6}{\sqrt{52}} = \frac{3}{\sqrt{13}} \text{ en}$$

  $$\cos(\angle(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF})) = \frac{\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right|} = \frac{3}{\sqrt{13}} \text{ (dus } \angle(\overrightarrow{EP}, \overrightarrow{EF}) = \angle(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF})$$

  waaruit volgt dat de lijn door E en F de bissectrice is van hoek PED).

Of

- Een vergelijking van AC is $x + 2y = 8$ (of een gelijkwaardige uitdrukking).
- Een vergelijking van PF is $x - 2y = 4$ (of een gelijkwaardige uitdrukking).
- De coördinaten van D zijn (6,1).
- $\overrightarrow{EP} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.
- Dus de lijn door E en P en de lijn door E en D zijn elkaars beeld bij spiegelen in de lijn EF, dus de lijn door E en F is de bissectrice van hoek PED.

Of

- Een vergelijking van AC is $x + 2y = 8$ (of een gelijkwaardige uitdrukking).
- Een vergelijking van PF is $x - 2y = 4$ (of een gelijkwaardige uitdrukking).
- De coördinaten van D zijn (6,1).
- $\angle PEF = \angle EPC$ (Z-hoeken) dus $\tan(\angle PEF) = \tan(\angle EPC) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
- In driehoek $D'ED$ (met D' de loodrechte projectie van D op EF) geldt: $\tan(\angle D'ED) = \frac{D'D}{D'E} = \frac{2}{3}$ (dus ($\angle D'ED = \angle PEF$ waaruit volgt dat de lijn door E en F de bissectrice is van hoek PED).

Of

- Uit de gelijkvormigheid van driehoek AOC met driehoek FOP volgt dat driehoek CPD gelijkbenig is, dus $DC = DP$.
- Hieruit volgt $y_D = \frac{-2+4}{2} = 1$.
- De coördinaten van D zijn (6,1).
- In driehoek $P'EP$ (met P' de loodrechte projectie van P op het verlengde van EF) geldt: $\tan(\angle P'EP) = \frac{P'P}{P'E} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
- In driehoek $D'ED$ (met D' de loodrechte projectie van D op EF) geldt: $\tan(\angle D'ED) = \frac{D'D}{D'E} = \frac{2}{3}$ (dus $\angle D'ED = \angle P'EP$ waaruit volgt dat de lijn door E en F de bissectrice is van hoek PED).

30. Wiskunde B VWO 2021, tijdvak 3, vraag 1

Oefenvraag examen 2021 tijdvak 3 – vraag 1

Gegeven is driehoek ABC met $AB = 4$ en $BC = 12$.
Punt M is het midden van lijnstuk BC. Verder geldt: $AM = 5$.
Bereken algebraisch de lengte van AC. Geef je eindantwoord in een decimaal.

Maximumscore 4 punten

Het juiste antwoord is:

- Cosinusregel in driehoek ABM geeft $5^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos(\angle ABM)$.
- Hieruit volgt $\cos(\angle ABM) = \frac{9}{16}$ (dus $\cos(\angle ABM) = \frac{9}{16}$) (dus $\angle ABC = 55{,}77...(°)$).
- Cosinusregel in driehoek ABC geeft $AC^2 = 4^2 + 12^2 - 2 \cdot 4 \cdot 12 \cdot \frac{9}{16}$.
- Dit geeft $AC^2 = 106$, dus $AC \approx 10{,}3$.

Of:

- Cosinusregel in driehoek ABM geeft $4^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos(\angle AMB)$.
- Hieruit volgt $\cos(\angle AMB) = \frac{3}{4}$ (dus $\angle AMB = 41{,}40...(°)$).
- $\cos(\angle AMC) = (-\cos(\angle AMB) =) -\frac{3}{4}$ (of ($\angle AMC = 180 - \angle AMB =$) $138{,}59...(°)$, dus $\cos(\angle AMC) = -\frac{3}{4}$.
- Cosinusregel in driehoek AMC geeft $AC^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot -\frac{3}{4} = 106$, dus $AC \approx 10{,}3$.

Of:

- Er geldt $t^2 + u^2 = 4^2$ (met P de loodrechte projectie van A op MB, $t = AP$ en $u = BP$).
- Ook geldt $t^2 + (6 - u)^2 = 5^2$.
- Algebraïsch oplossen van dit stelsel geeft $t = 3{,}30...$, $u = 2{,}25$ (de oplossing $t = -3{,}30...$, $u = 2{,}25$ voldoet niet).
- Omdat $AC^2 = t^2 + (12 - u)^2$, volgt $AC^2 = 106$, dus $AC \approx 10{,}3$.

5.2 Algebraïsche methoden in de vlakke meetkunde

31. Wiskunde B VWO 2023, tijdvak 1, vraag 13

Oefenvraag examen 2023 tijdvak 1 – vraag 13

De functie f wordt gegeven door:

$f(x) = \ln(x)$

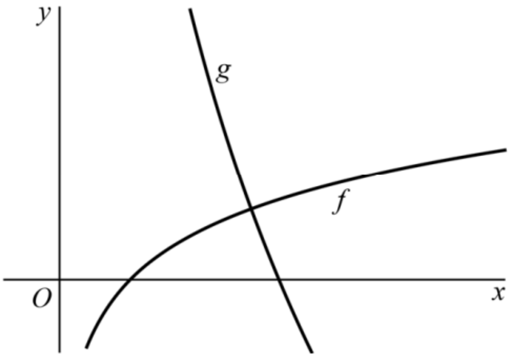
De functie g wordt gegeven door:

$g(x) = 1 + e^2 \cdot (1 - \ln(x))$

In figuur 1 zijn de grafieken van f en g weergegeven. De raaklijnen aan de grafieken van f en g snijden elkaar loodrecht in het snijpunt.

Bewijs dit.

figuur 1



Maximumscore 6 punten

Het juiste antwoord is:

- Uit $f(x) = g(x)$ volgt $(1 + e^2) \cdot \ln(x) = 1 + e^2$.
- Dit geeft $\ln(x) = 1$ dus $x = e$.
- $f'(x) = \frac{1}{x}$.
- $g'(x) = -\frac{e^2}{x}$.
- $f'(e) = \frac{1}{e}$ en $g'(e) = -\frac{e^2}{e} = -e$.
- $f'(e) \cdot g'(e) = \frac{1}{e} \cdot -e = -1$ dus de grafieken snijden elkaar loodrecht.

Of

- $f'(x) = \frac{1}{x}$.
- $g'(x) = -\frac{e^2}{x}$.
- Er moet gelden: $f'(x) \cdot g'(x) = -1$.
- Dit geeft $-\frac{e^2}{x^2} = -1$.
- Dit geeft $x = e$ ($x = -e$ is geen oplossing).
- $f(e) = 1$ en $g(e) = 1$ (dus de grafieken snijden elkaar in $(e,1)$) en dus snijden de grafieken elkaar loodrecht.

5.3 Vectoren en inproduct

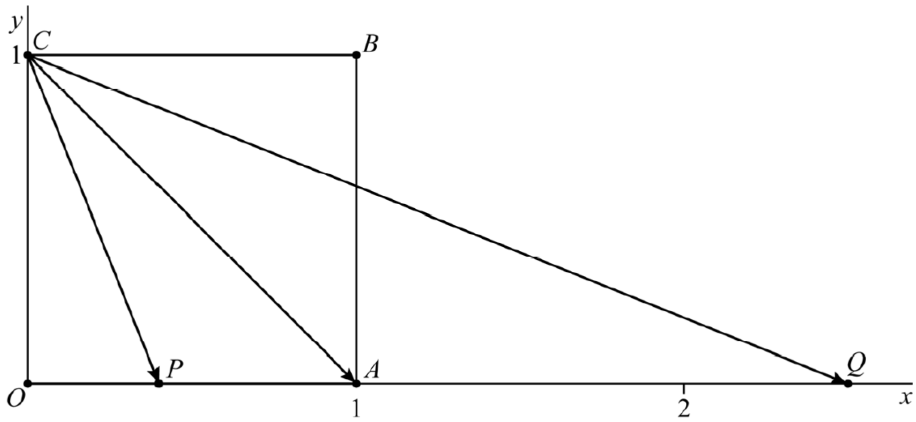
32. Wiskunde B VWO 2021, tijdvak 1, vraag 8

Oefenvraag examen 2021 tijdvak 1 – vraag 8

Gegeven is het vierkant *OABC* met hoekpunten *O*(0, 0) , *A*(1, 0) , *B*(1, 1) en *C*(0,1). Verder zijn gegeven het punt *P*(*p*, 0) en het punt *Q*($\frac{1}{p}$, 0), met $0 < p < 1$.

In figuur 1 zijn de vectoren $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{CA}$ en $\overrightarrow{CQ}$ voor een willekeurige waarde van *p* weergegeven.

figuur 1



Bewijs dat voor elke waarde van *p* de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{CP}$ en $\overrightarrow{CA}$ gelijk is aan de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{CA}$ en $\overrightarrow{CQ}$.

Maximumscore 6 punten

Het juiste antwoord is:

- $\underset{CP}{\rightarrow} = \begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\underset{CA}{\rightarrow} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- $\cos(\angle PCA) = \dfrac{\begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right|}$
- Dit is gelijk aan $\dfrac{p+1}{\sqrt{p^2+1} \cdot \sqrt{2}}$
- ($\underset{CQ}{\rightarrow} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} \\ -1 \end{pmatrix}$ dus) (*p* vervangen door $\frac{1}{p}$ geeft) $\cos(\angle ACQ) = \dfrac{\frac{1}{p}+1}{\sqrt{(\frac{1}{p})^2+1} \cdot \sqrt{2}}$
- Teller en noemer van $\dfrac{\frac{1}{p}+1}{\sqrt{(\frac{1}{p})^2+1} \cdot \sqrt{2}}$ vermenigvuldigen met *p* geeft $\dfrac{1+p}{\sqrt{p^2} \cdot \sqrt{(\frac{1}{p})^2+1} \cdot \sqrt{2}}$
- Dit is gelijk aan $\dfrac{1+p}{\sqrt{1+p^2} \cdot \sqrt{2}}$, (dus $\cos(\angle ACQ) = \cos(\angle PCA)$,) dus (in deze situatie) $\angle ACQ = \angle PCA$ (dus de hoek tussen de vectoren $\underset{CP}{\rightarrow}$ en $\underset{CA}{\rightarrow}$ is gelijk aan de hoek tussen de vectoren $\underset{CA}{\rightarrow}$ en $\underset{CQ}{\rightarrow}$.

Of:

- $\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- $\cos(\angle PCA) = \dfrac{\begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right|}$
- Dit is gelijk aan $\dfrac{p+1}{\sqrt{p^2+1} \cdot \sqrt{2}}$
- ($\overrightarrow{CQ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} \\ -1 \end{pmatrix}$ dus) (p vervangen door $\frac{1}{p}$ geeft) $\cos(\angle ACQ) = \dfrac{\frac{1}{p}+1}{\sqrt{(\frac{1}{p})^2+1} \cdot \sqrt{2}}$
- Gelijkstellen van beide uitdrukkingen en vervolgens kruislings vermenigvuldigen geeft (dat bewezen moet worden:) $\sqrt{p^2}\sqrt{(\frac{1}{p})^2 + 1} + \sqrt{(\frac{1}{p})^2 + 1} = \sqrt{\frac{1}{p^2}}\sqrt{p^2+1} + \sqrt{p^2+1}$.
- Dit geeft $\sqrt{1+p^2} + \sqrt{\frac{1}{p^2}+1} = \sqrt{1+\frac{1}{p^2}} + \sqrt{p^2+1}$, (en dit is inderdaad aan elkaar gelijk, dus $\cos(\angle ACQ) = \cos(\angle PCA)$,) dus (in deze situatie) $\angle ACQ = \angle PCA$ (dus de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{CP}$ en $\overrightarrow{CA}$ is gelijk aan de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{CA}$ en $\overrightarrow{CQ}$.

Of:

- De richtingscoëfficiënt van de lijn door C en Q is $\dfrac{-1}{\frac{1}{p}} = -p$
- Het snijpunt R van de lijn door C en Q en lijnstuk AB heeft dus y-coördinaat $1 - p$.
- $PA = 1 - p$, dus $PA = RA$.
- $\angle PAC = \angle RAC$ (= 45°) (want AC is een diagonaal van een vierkant).
- Ook geldt $CA = CA$, dus ΔCAP is gelijkvormig met ΔCAR.
- Uit deze gelijkvormigheid volgt dat $\angle ACQ$ = ($\angle ACR$ =) $\angle ACP$ (dus de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{CP}$ en $\overrightarrow{CA}$ is gelijk aan de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{CA}$ en $\overrightarrow{CQ}$).

Of:

- $\dfrac{OC}{OP} = \dfrac{1}{p}$
- $\dfrac{OQ}{OC} = \dfrac{\frac{1}{p}}{1} = \dfrac{1}{p}$
- Ook geldt $\angle POC = \angle COQ$, dus ΔOPC is gelijkvormig met ΔOCQ.
- $\angle OCQ = \angle BCQ$ (Z-hoeken), dus $\angle OCP = \angle OQC = \angle BCQ$.
- $\angle ACP = 45° - \angle OCP$ en $\angle QCA = 45° - \angle BCQ$.
- Dus $\angle ACP = \angle QCA$ (dus de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{CP}$ en $\overrightarrow{CA}$ is gelijk aan de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{CA}$ en $\overrightarrow{CQ}$).

33. Wiskunde B VWO 2019, tijdvak 1, vraag 1

Oefenvraag examen 2019 tijdvak 1 – vraag 1

Gegeven is cirkel c met middelpunt (1, 7) en straal 5.

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ is een vectorvoorstelling van een lijn k door de oorsprong.

Lijn k snijdt cirkel c in twee punten.
Bereken exact de coördinaten van deze snijpunten.

Maximumscore 5 punten

Het juiste antwoord is:

- Een vergelijking van c is $(x-1)^2 + (y-7)^2 = 25$.
- Voor de snijpunten geldt $(t-1)^2 + (2t-7)^2 = 25$.
- Herleiden tot $5t^2 - 30t + 25 = 0$.
- Een exacte berekening waaruit volgt $t = 1$ of $t = 5$.
- De snijpunten zijn (1, 2) en (5, 10).

Of:

- Een vergelijking van c is (x – 1)2 + (y – 7)2 = 25.
- Voor de snijpunten geldt (omdat $x = \frac{1}{2}y$ een vergelijking van k is) $(\frac{1}{2}y - 1)^2 + (y-7)^2 = 25$.
- Herleiden tot $\frac{5}{4}y^2 - 15y + 25 = 0$.
- Een exacte berekening waaruit volgt $y = 2$ of $y = 10$.
- De snijpunten zijn (1, 2) en (5, 10).

34. Wiskunde B VWO 2016 (pilot), tijdvak 2, vraag 15

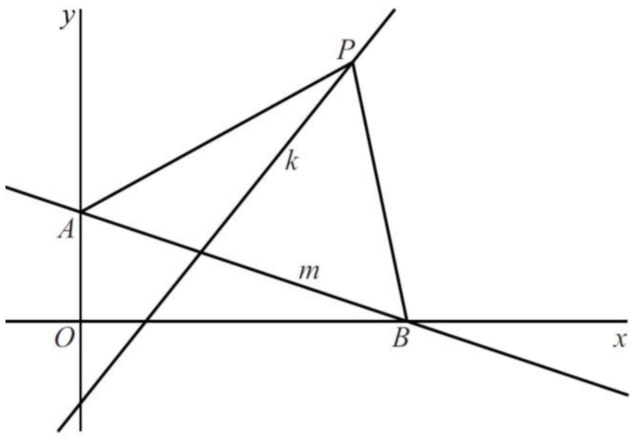
Oefenvraag pilot examen 2016 tijdvak 2 – vraag 15

Lijn k is de lijn met vectorvoorstelling

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Punt P beweegt over lijn k.
Lijn m gaat door de punten $A(0, 2)$ en $B(6, 0)$. Zie figuur 1.

figuur 1



Bereken exact de coördinaten van P in de situatie dat $AP = BP$.

Maximumscore 5 punten

Het juiste antwoord is:

- $AP^2 = (2 + 4t)^2 + (5t - 1)^2$.
- $BP^2 = (4t - 4)^2 + (5t + 1)^2$.
- $AP^2 = BP^2$ herleiden tot een lineaire vergelijking.
- Dit geeft $t = \frac{3}{7}$.
- Invullen in de vectorvergelijking van k geeft $P(3\frac{5}{7}, 3\frac{1}{7})$.

Of:

- Een vergelijking van lijn k is $y = 1\frac{1}{4}x - 1\frac{1}{2}$.
- $AP^2 = x^2 + (1\frac{1}{4}x - 3\frac{1}{2})^2$ en $BP^2 = (x - 6)^2 + (1\frac{1}{4}x - 1\frac{1}{2})^2$.
- $AP^2 = BP^2$ herleiden tot een lineaire vergelijking.
- Dit geeft $x = 3\frac{5}{7}$.

- Invullen in de vergelijking van k geeft $y = 3\frac{1}{7}$ (dus $P(3\frac{5}{7}, 3\frac{1}{7})$).

Of:

- Een vergelijking van lijn k is $y = 1\frac{1}{4}x - 1\frac{1}{2}$.
- Een vergelijking van de middelloodlijn n van lijnstuk AB is van de vorm $6x - 2y + c = 0$.
- Het punt (3, 1) ligt op n; hieruit volgt voor n de vergelijking $y = 3x - 8$.
- $3x - 8 = 1\frac{1}{4}x - 1\frac{1}{2}$ exact oplossen geeft $x = 3\frac{5}{7}$.
- Invullen in de vergelijking van k geeft $y = 3\frac{1}{7}$ (dus $P(3\frac{5}{7}, 3\frac{1}{7})$).

Of:

- Een vergelijking van lijn k is $y = 1\frac{1}{4}x - 1\frac{1}{2}$.
- Een richtingsvector van de middelloodlijn n van lijnstuk AB is $\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$.
- Een vectorvoorstelling van de middelloodlijn is $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$.
- $1 + 6t = 1\frac{1}{4}(3 + 2t) - 1\frac{1}{2}$ exact oplossen geeft $t = \frac{5}{14}$; dit geeft $x = 3\frac{5}{7}$.
- $y = 3\frac{1}{7}$ (dus $P(3\frac{5}{7}, 3\frac{1}{7})$).

35. Wiskunde B VWO 2012 (pilot), tijdvak 2, vraag 14

Oefenvraag pilot examen 2012 tijdvak 2 – vraag 14

Gegeven zijn de lijn *m* met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$,

de lijn *n* met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

en de cirkel *c* met vergelijking $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

Bereken de hoek tussen *m* en *n*. Rond je antwoord af op een geheel aantal graden.

Maximumscore 3 punten

Het juiste antwoord is:

- Voor de hoek α tussen *m* en *n* geldt:
- $\cos \alpha = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2}} \; \left(= \dfrac{7}{\sqrt{50}} \right)$.
- De gevraagde waarde van α is 8°.

Of:

- De richtingscoëfficiënt van *m* is –2, dus *m* maakt een hoek van ongeveer 63,4° (of –63,4°) met de *x*-as.
- De richtingscoëfficiënt van *n* is –3, dus *n* maakt een hoek van ongeveer 71,6° (of –71,6°) met de *x*-as.
- De hoek tussen *m* en *n* is het verschil tussen deze twee hoeken, dus de gevraagde waarde is 8°.

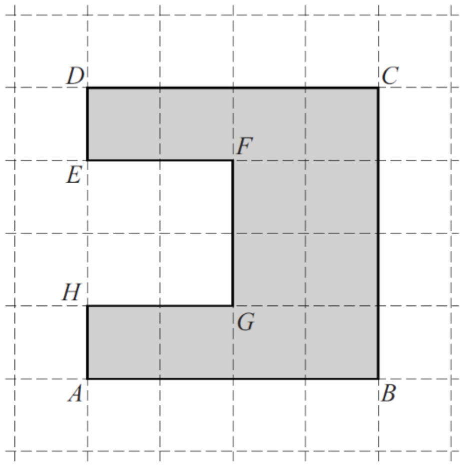
36. Wiskunde B VWO 2013 (pilot), tijdvak 1, vraag 17

Oefenvraag pilot examen 2013 tijdvak 1 – vraag 17

Gegeven is een veelhoek *ABCDEFGH*. Deze veelhoek is ontstaan door uit vierkant *ABCD* met zijde 4, het vierkant *HGFE* met zijde 2 weg te laten. Hierbij liggen *E* en *H* beide op *AD* met *AH* = *DE*. Zie de figuur.

Om het zwaartepunt van deze veelhoek te vinden, kan de veelhoek bijvoorbeeld worden verdeeld in drie rechthoeken die vervolgens worden opgevat als drie puntmassa's. Het zwaartepunt van de drie puntmassa's valt dan samen met het zwaartepunt van de veelhoek.

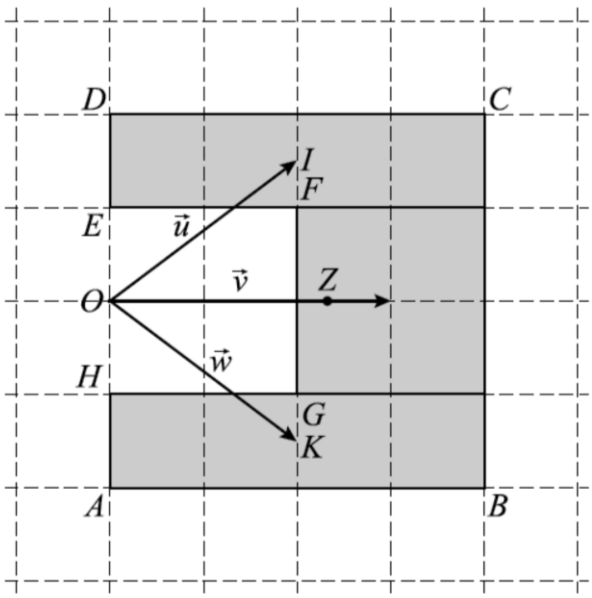
Teken in de figuur met behulp van vectoren de plaats van het zwaartepunt van de veelhoek. Licht je werkwijze toe.



Maximumscore 5 punten

Het juiste antwoord is:

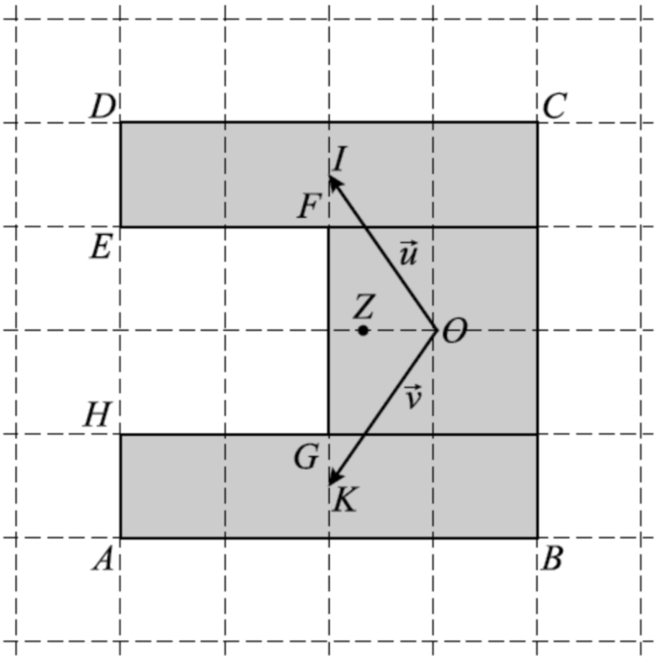
- Het verdelen van het gebied in drie rechthoeken met gelijke oppervlakte en in elk gebied de bijbehorende puntmassa aangeven.
- Het tekenen van drie vectoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ en $\vec{w}$ zoals bijvoorbeeld hieronder:



- Voor elke vector is de wegingsfactor $\frac{1}{3}$.
- Het zwaartepunt is eindpunt van de vector $\frac{1}{3}$ $(\vec{u}, + \vec{v} + \vec{w})$.
- Het tekenen van zwaartepunt Z.

Of:

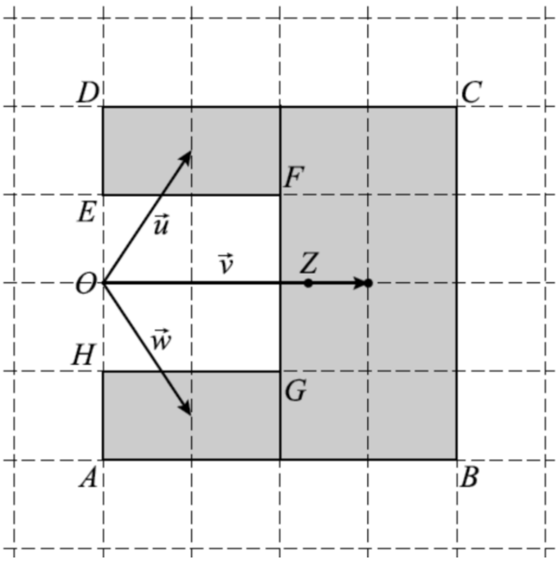
- Het verdelen van het gebied in twee rechthoeken met gelijke oppervlakte en in elk gebied de bijbehorende puntmassa aangeven.
- Het tekenen van twee vectoren $\vec{u}$ en $\vec{v}$ zoals hieronder aangegeven:



- Voor elke vector is de wegingsfactor $\frac{1}{3}$.
- Het zwaartepunt is eindpunt van de vector $\frac{1}{3}(\vec{u} + \vec{v})$.
- Het tekenen van zwaartepunt Z.

Of:

- Het verdelen van het gebied in drie rechthoeken met verschillende oppervlakte en in elk gebied de bijbehorende puntmassa aangeven.
- Het tekenen van drie vectoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ en $\vec{w}$, bijvoorbeeld zoals hieronder:



- Omdat de oppervlaktes zich verhouden als 1 : 4 : 1 is het zwaartepunt eindpunt van de vector $\frac{1}{6}\vec{u} + \frac{4}{6}\vec{v} + \frac{1}{6}\vec{w}$ ($= \frac{1}{6}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v} + \frac{1}{6}\vec{w}$).
- Het tekenen van zwaartepunt Z.

Of:

- Verdelen van het gebied in drie rechthoeken met verschillende oppervlakte en in elk gebied aangeven van de puntmassa, zoals bijvoorbeeld hierboven.
- Kiezen van een oorsprong en geven van de kentallen van de drie vectoren van deze oorsprong tot de puntmassa's, bijvoorbeeld $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$.
- Omdat de oppervlaktes zich verhouden als 1 : 4 : 1 is het zwaartepunt eindpunt van de vector $\frac{1}{6}\vec{u} + \frac{4}{6}\vec{v} + \frac{1}{6}\vec{w} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \frac{4}{6}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Het tekenen van zwaartepunt Z.